Cap. 6. Cálculo Variacional

É necessário, em muitos problemas, o uso de coordenadas que não as cartesianas:

(i) por causa - e para tomar partido - das simetrias (esférica, axial)

(ii) em problemas com vínculo (movimento sobre superfície esférica, conta em fio de arame)

Infelizmente as expressões para as componentes da aceleração nestas coordenadas não são muito simples, como já vimos. Felizmente podemos contar com uma equação de movimento equivalente à 2ª lei e que funciona igualmente bem em qualquer sistema de coordenadas: as equações de Lagrange.

A melhor maneira de demonstrar e compreender a grande flexibilidade desta formulação alternativa da mecânica é através do uso de um <u>princípio variacional</u>.

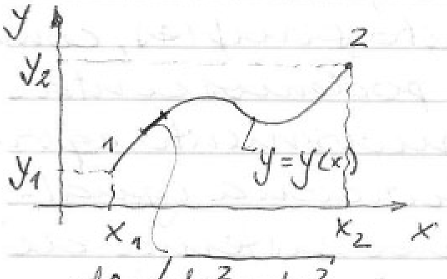
Princípios variacionais são importantes em muitas áreas da Física e da Matemática. É possível formular praticamente qualquer ramo da Física - mecânica clássica, quântica, ótica, eletromagnetismo e outros - em termos de princípios variacionais. Porque estes conseguem uma formulação similar de assuntos tão diferentes, dão uma nova unidade à Física e desempenham papel crucial em sua história recente.

6.1 Dois exemplos

O cálculo variacional trata do problema de encontrar máximo ou mínimo de uma quantidade expressa por uma integral.

- O menor caminho entre 2 pontos

Todo mundo sabe a resposta. Mas como demonstrá-la?



A pergunta: sobre qual caminho $y=y(x)$ a distância entre os pontos 1 e 2 é a menor possível?

Dado um $y=y(x)$, a distância é $d=\int_1^2 ds$, onde

$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$ e, como $y=y(x)$, $dy=\frac{dy}{dx}dx = y'(x)dx$

$$d=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx$$

Em termos matemáticos: qual a função $y=y(x)$ que torna d mínimo?

A resposta é uma <u>função</u>, em contraste com o problema padrão de minimização no cálculo elementar, onde ~~se~~ busca o valor da <u>variável</u> x que torna a função <u>conhecida</u> $f(x)$ mínima.

- Princípio de Fermat

Um problema similar é o de encontrar a trajetória que a luz segue entre 2 pontos, que podem estar em meios (de índices de refração) distintos e mediados por espelhos e lentes. O matemático francês Fermat (1601-1665) descobriu que esta é a trajetória para a qual o tempo de percurso é o menor possível (exemplo da reflexão em espelho plano: geometria!). O tempo que a luz leva para percorrer distância (infinitesimal) ds em um meio de índice de refração n ($n = \frac{c}{v}$, v = velocidade de propagação no meio) é $dt = \frac{ds}{v} = \frac{1}{c} n\, ds$, e o caminho que a luz "escolhe" entre os pontos 1 e 2 é o que torna mínimo o tempo de percurso

$$\Delta t = \int_1^2 dt = \frac{1}{c}\int_1^2 n\, ds$$

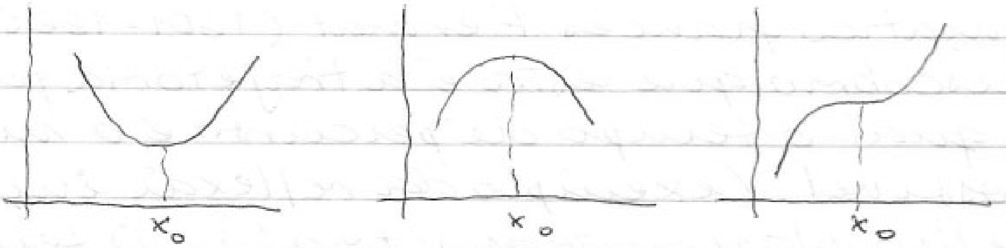
Se n é constante, Δt é mínimo quando $d = \int ds$ o for $\Rightarrow$ propagação em linha reta! Em geral, $n = n(x,y)$, e queremos achar a trajetória $y = y(x)$ que torna mínima a integral

$$\Delta t = \frac{1}{c}\int_1^2 n(x,y)\, ds = \frac{1}{c}\int_{x_1}^{x_2} n(x,y)\sqrt{1+y'(x)^2}\, dx$$

Problemas similares - envolvendo mínimos ou máximos de integrais - aparecem em várias situações

04/05/09

No cálculo elementar, o problema similar (mas diferente!) se resolve encontrando os valores da variável $\underline{x}$ para os quais $\frac{df}{dx} = 0$ – mas isto ainda não é suficiente para distinguir entre 3 possibilidades diferentes.



Se $\frac{df}{dx}(x = x_0) = 0 \Rightarrow x_0$ é um ponto estacionário (deslocamento dx não muda, em 1ª ordem, o valor de f)

Nossa situação é similar. Vamos desenvolver método para encontrar $y = y(x)$ que torne a integral <u>estacionária</u>, no sentido de que uma variação infinitesimal do trajeto ($y = y(x)$) não modifique, em 1ª ordem, seu valor. Se for necessário distinguir entre máximo e mínimo - ou nenhum deles - devemos checar isto separadamente (como no cálculo elementar: se $f''(x_0) > 0$, mínimo, se < 0, máximo, se $= 0$, inflexão).

Estamos agora preparados para explicar o nome do capítulo: como nosso objetivo é determinar como uma variação infinitesimal do caminho muda o valor da integral, o assunto se chama cálculo das variações - ou variacional.

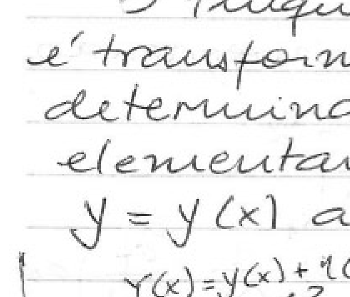
6.2 - A equação de Euler-Lagrange

A forma geral do problema variacional é então: temos uma integral do tipo

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f\left[y(x), y'(x), x\right] dx$$

onde $y(x)$ é uma função desconhecida que passa pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) ($y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$). Entre todas as funções que passam por estes 2 pontos, queremos encontrar aquela que torna S estacionária. Note que a função f no integrando é de 3 variáveis, $f(y, y', x)$, mas como a integral segue o caminho $y = y(x)$, o integrando $f[y(x), y'(x), x]$ só depende da variável x.

O truque para resolver este problema é transformá-lo num problema de determinação de extremo do cálculo elementar, e isto se faz assim: seja $y = y(x)$ a solução que buscamos;



então, S calculada sobre ela será (menor) estacionária e menor que S calculada sobre $Y(x) = y(x) + \eta(x)$, $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ (já que qualquer curva tem que passar pelos pontos 1 e 2) e $\eta(x)$ função qualquer que satisfaça a esta última exigência. Para transformar o problema num de cálculo

elementar, introduzo parâmetro (real) α e redefino $Y(x) = y(x) + \alpha\eta(x)$
$\Rightarrow$ $S = S(\alpha)$, e $S(0)$ tem que ser estacionária para qualquer escolha de $\eta(x)$ que satisfaça às condições de contorno $\Rightarrow$ $\frac{dS}{d\alpha}(\alpha=0) = 0$.
Más

$$S(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(Y, Y', x)\,dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} f(y+\alpha\eta, y'+\alpha\eta', x)\,dx \text{, e}$$

$$\frac{dS}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\,dx \text{, e} \quad \left(\eta' = \frac{d\eta}{dx}\right)$$

$$\frac{\partial f(y+\alpha\eta, y'+\alpha\eta', x)}{\partial\alpha} = \frac{\partial f}{\partial y}\eta + \frac{\partial f}{\partial y'}\eta'$$

$$\Rightarrow \frac{dS}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2}\left(\eta\frac{\partial f}{\partial y} + \eta'\frac{\partial f}{\partial y'}\right)dx$$

Vamos nos livrar de η' integrando a 2ª parcela por partes:

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta' \frac{\partial f}{\partial y'}\,dx = \left[\eta(x)\frac{\partial f}{\partial y'}\right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x)\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)dx$$

O termo integrado é nulo ($\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$); logo,

$$\frac{dS}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \eta(x)\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)dx = 0$$

para <u>qualquer</u> função $\eta(x)$ $\Rightarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \qquad \text{eq. Euler-Lagrange}$$

(em $x \in [x_1, x_2]$)

O passo final foi: se $\int \eta(x) g(x)\, dx = 0$ para qualquer $\eta(x) \Rightarrow g(x) = 0$. Demonstração: suponha que $g(x) \neq 0$ em algum intervalo $I \in [x_1, x_2]$; escolha $\eta(x) = g(x)$

$$\Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) g(x)\, dx = \int_I [g(x)]^2 dx \geq \min[g(x)]^2 \cdot \Delta(I) > 0$$

6.3. Aplicações da eq. Euler-Lagrange

Exemplo 1: o menor caminho

$$d = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\sqrt{1+y'^2}}_{f(y,y',x) = (1+y'^2)^{1/2}} dx$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \;;\; \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{1}{2}(1+y'^2)^{-1/2} \cdot 2y' = \frac{y'}{(1+y'^2)^{1/2}}$$

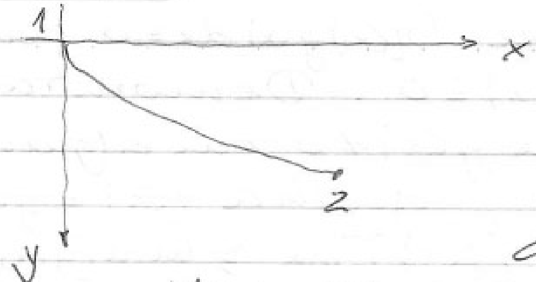
eq. E-L: $\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y'}$ é constante $= C$

$$y'^2 = C^2(1+y'^2) \Rightarrow y'^2 = \frac{C^2}{1-C^2} \Rightarrow y' = \text{cte}$$

$y'(x) = m \Rightarrow y(x) = mx + b$: linha reta!

Cuidado com as variáveis: em problemas 1D, queremos obter $x = x(t)$ (e não $y = y(x)$...)

Ex. 2: a braquistócrona - dados 2 pontos 1 e 2, 1 mais alto que 2, qual a forma que deve ter uma rampa sem atrito que leve de 1 a 2 no menor tempo possível? (braquistos: menor; cronos: tempo)



$$\Delta t_{1\to 2} = \int_1^2 \frac{ds}{v}$$

Por conservação da energia, $v = \sqrt{2gy}$

Vamos escrever a eq. da trajetória na forma $x = x(y)$ (já que $v = v(y)$).

$$\Downarrow$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{x'(y)^2 + 1}\, dy$$

$$\left(x'(y) = \frac{dx}{dy}\right)$$

$$\Delta t_{1\to 2} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{y_2} \frac{\sqrt{x'(y)^2+1}}{\sqrt{y}}\, dy$$

$$f(x, x', y) = \frac{\sqrt{x'^2+1}}{\sqrt{y}}$$

eq. E-L: $\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{d}{dy}\dfrac{\partial f}{\partial x'} = 0$ (com estas variáveis)

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \Longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x'} = \text{constante}$ (não depende de y)

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{x'}{\sqrt{x'^2+1}}, \quad e$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right)^2 = \frac{1}{y} \frac{x'^2}{(1+x'^2)} = \frac{1}{2a}$$ (por conveniência futura)

$$\Downarrow$$

$$x' = \sqrt{\frac{y}{2a-y}} \Longrightarrow x = \int \sqrt{\frac{y}{2a-y}}\, dy,$$

que pode ser calculada pela substituição trigonométrica $y = a(1-\cos\theta)$

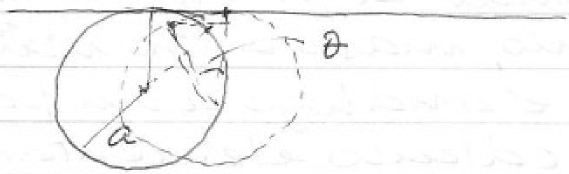
$$\Downarrow$$

$$x = a\int(1-\cos\theta)\,d\theta = a(\theta - \operatorname{sen}\theta) + \text{const}$$

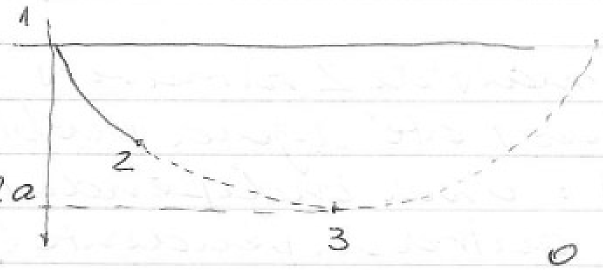
Estas últimas são as equações paramétricas da trajetória desejada:

$$x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta)$$
$$y = a(1 - \cos\theta)$$

— que é uma ciclóide, curva traçada por um ponto na circunferência de aro de raio $\underline{a}$ que rola sem deslizar sobre a parte de baixo do eixo x.



$$x = a\theta - a\operatorname{sen}\theta$$
$$y = a - a\cos\theta$$



Esta é também uma trajetória isócrona: o tempo que leva para ir de 1 ponto qualquer entre 1 e 3 até o ponto 3 é sempre o mesmo $\Rightarrow$ oscilações sobre uma ciclóide são isócronas exatamente (ao contrário do pêndulo simples, no qual elas só o são para pequenas amplitudes)

Máximos, mínimos e estacionaridade.

O problema de determinar se uma determinada solução (estacionária) é um máximo ou um mínimo — ou nenhum dos 2! — é, em geral, difícil. Felizmente esta questão é irrelevante para nossos propósitos - tudo o que nos interessa é o caminho que torna uma certa integral estacionária.

Mas considere o problema de encontrar a geodésica - menor caminho - entre 2 pontos, por exemplo, Quito e Macapá (sobre o equador). A solução dada pelas eq. Euler-Lagrange é trecho de grande círculo - mas há 2! Um deles é, de fato, o mínimo, mas o outro não é nenhum dos 2, e é análogo a um ponto de inflexão no cálculo elementar.

6.4 Problemas com mais de 2 variáveis

Só consideramos até agora problemas com 2 variáveis: uma independente (x, usualmente) e outra dependente (y). Para a maioria das aplicações em mecânica precisaremos lidar com várias variáveis dependentes - mas felizmente apenas 1 independente, em geral o tempo.

Exemplo geométrico: quando buscamos o menor trajeto entre 2 pontos, consideramos que ele pudesse ser escrito na forma $y = y(x)$, e com isso excluímos coisas como mostradas na

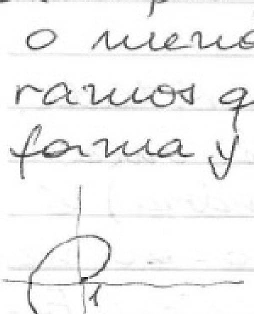


figura. Para ser + geral, temos que usar a forma paramétrica das curvas:

$x = x(u)$ e $y = y(u)$
$\Rightarrow ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}\, du$
$\left(x'(u) = \frac{dx}{du}\right)$
e o comprimento do trajeto é
$$\int_{u_1}^{u_2} \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}\, du \quad ;$$
devemos agora encontrar duas funções, $x(u)$ e $y(u)$.

O problema geral é: dada uma integral da forma
$$S = \int_{u_1}^{u_2} f\,[x(u), y(u), x'(u), y'(u)]\, du$$
entre os pontos (fixos) $[x(u_1), y(u_1)]$ e $[x(u_2), y(u_2)]$, encontrar o caminho $[x(u), y(u)]$ que torna S estacionária.

A solução deste problema é semelhante à do caso com 1 só variável dependente, só que acabaremos por obter duas equações de Euler-Lagrange.

Demonstração:

Suponha que o caminho correto seja dado por $x = x(u)$ e $y = y(u)$, e considere um caminho ("errado") próximo a este
$$x = x(u) + \alpha\,\xi(u) \quad e \quad y = y(u) + \beta\,\eta(u)$$
Para que S seja estacionária sobre o caminho correto, temos que ter
$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{\partial S}{\partial \beta} = 0 \quad \text{quando } \alpha = \beta = 0$$

e, por um raciocínio semelhante ao usado no caso anterior, podemos mostrar que estas 2 condições são equivalentes às equações

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{du}\frac{\partial f}{\partial x'} \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{du}\frac{\partial f}{\partial y'}$$

O exemplo geométrico de novo:

$$f(x, x', y, y') = \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

Como $\frac{d}{du}\frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{d}{du}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$,

$$\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} = C_1 \quad \text{(constante) e}$$

$$\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} = C_2 \Rightarrow \frac{y'}{x'} = \frac{C_1}{C_2} = m \; ;$$

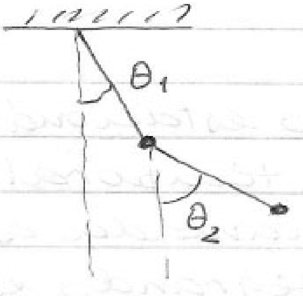
mas $\frac{y'}{x'} = \frac{dy/du}{dx/du} = \frac{dy}{dx} \Rightarrow$

$\frac{dy}{dx} = m$, e $y = mx + b$: linha reta.

(e é interessante observar que a demonstração completa, usando a representação paramétrica, é + fácil que a anterior incompleta...)

A generalização da eq. de Euler-Lagrange para um número arbitrário de variáveis dependentes é imediata.

A aplicação destas idéias à mecânica é o que chamamos a formulação Lagrangeana. A variável independente é o tempo $\underline{t}$. As variáveis dependentes são as coordenadas que especificam a posição - ou configuração - de um sistema, que denotaremos usualmente por $q_1, q_2, \ldots, q_n$. O número $\underline{n}$ de coordenadas depende da natureza do sistema. Para uma partícula se movendo sem vínculos em 3D, $n=3$ e q_1, q_2 e q_3 poderiam ser as 3 coordenadas cartesianas x, y e z ou as coordenadas esféricas r, θ e ϕ, por exemplo. Para N partículas se movendo em 3D, $n = 3N$. Para o pêndulo duplo, $n=2$ -



que poderiam ser os 2 ângulos mostrados ($q_1 = \theta_1$ e $q_2 = \theta_2$).

Porque as coordenadas q_i podem ser tantas coisas diferentes, são chamadas de <u>coordenadas generalizadas</u>. É muitas vezes útil pensar nas $\underline{n}$ coordenadas generalizadas como definindo um ponto num <u>espaço de configurações</u> n-dimensional, cada ponto do qual rotula uma posição - ou configuração -

do sistema.

O objetivo da maioria dos problemas na mecânica Lagrangeana é obter as n funções $q_1(t), \ldots, q_n(t)$, que definem um caminho no espaço de configurações. Este caminho é determinado pela 2ª lei de Newton, claro, mas vamos ver que ele também pode ser caracterizado como aquele que torna uma certa integral estacionária. Isto significa que ele deve satisfazer as eq. de Euler-Lagrange (que, neste contexto, são chamadas de eq. de Lagrange) apropriadas. Estas são usualmente mais simples de escrever e usar do que a 2ª lei. Em particular, elas têm a mesma forma simples em qualquer sistema de coordenadas, ao contrário da 2ª lei.

A integral que, quando estacionária, determina a evolução temporal do sistema mecânico é chamada a integral de ação. Seu integrando é chamado de (função) lagrangeana $\mathcal{L}$, e depende de $q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ e de t:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, \dot{q}_1, \ldots, q_n, \dot{q}_n, t)$$

Exigir que a integral de ação

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_1, \dot{q}_1, \ldots, q_n, \dot{q}_n, t)\, dt$$

seja estacionária implica nas n

MG 6.15

equações de Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1}, \dots$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n}$$

Se estas equações forem satisfeitas, S é estacionária, e vice-versa.